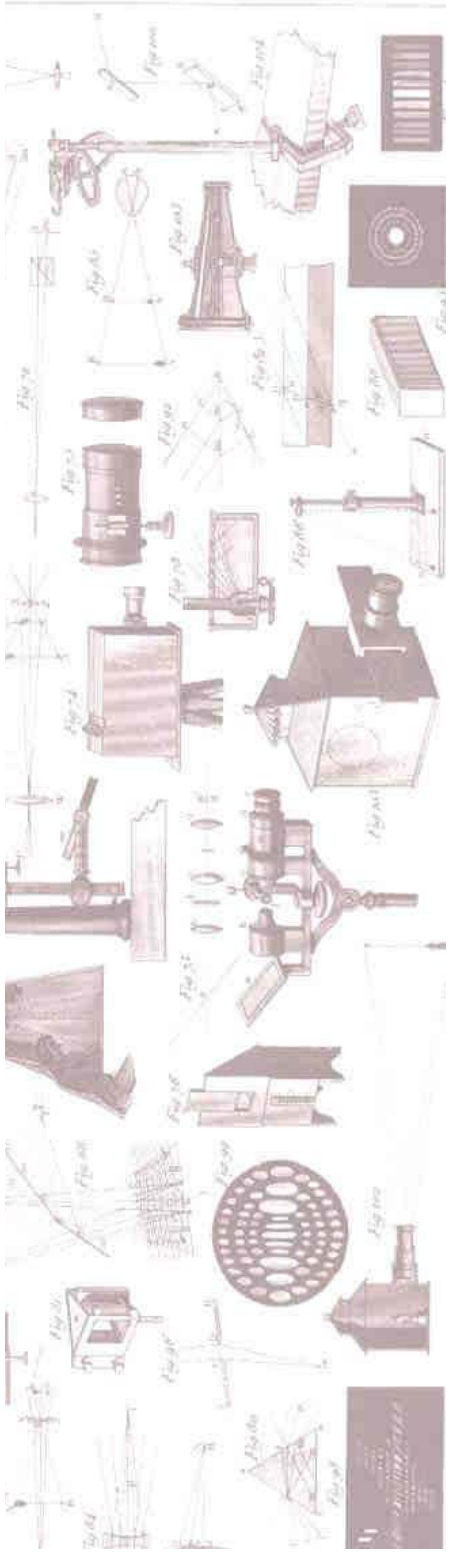


INTRODUCTION A LA MECANIQUE ANALYTIQUE

Formalisme de Lagrange

Philippe Hautcoeur
Philippe.Hautcoeur@ac-nantes.fr

SOMMAIRE

Chapitre 1- Principe des travaux (puissances) virtuel(le)s

1.Préambule : différentielles et dérivées virtuelles
- 1.1 Différentielles virtuelles
- 1.2 Dérivée virtuelle

2. Déplacement et vitesse virtuels : définitions
- 2.1 Déplacement virtuel
- 2.2 Vitesse virtuelle

3. Travail et puissance virtuels – Principe de d'Alembert
- 3.1 Définition
- 3.2 Principe de d'Alembert
- 3.3 démarche lors de l'application du principe de d'Alembert
- 3.4 Application

Exercice d'application

Chapitre 2- Equations de Lagrange

1. Rappels : principe de d'Alembert et puissance virtuelle
2. Vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant t
   - 2.1 Configuration du système à l'instant t
   - 2.2 Liaisons imposées au système
     - 2.2.1 les liaisons holonômes
     - 2.2.2 les liaisons non-holonômes
     - 2.2.3 Exemple
   - 2.3 Vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant t
     - 2.3.1 Exemples
3. Puissance virtuelle développée par les actions mécaniques
   - 3.1Forme générale de la puissance
4. Puissance virtuelle développée par les quantités d'accélération
5. Forme générale des équations de Lagrange
   - 5.1 Nouvelle écriture du principe de d'Alembert
   - 5.2 Choix des vitesses virtuelles
   - 5.3 Calcul de la puissance virtuelle dans quelques cas particuliers courants
     - 5.3.1 Puissance virtuelle développée par les actions mécaniques appliquées à un solide parfait dans une transformation virtuelle.
     - 5.3.2 Puissance virtuelle développée par les actions de liaisons intérieures dans une transformation virtuelle
     - 5.3.3 Puissance virtuelle développée par les actions données dérivant d'un potentiel dans une transformation virtuelle
     - 5.3.4 Cas des systèmes à liaisons parfaites pour lesquels les forces données dérivent toutes d'un potentiel
   - 5.4 Equations de Lagrange pour un champ de vitesses virtuelles compatible avec les liaisons holonômes et les liaisons non-holonômes : les multiplicateurs de Lagrange.
   - 5.5 Variante dans la décomposition des forces généralisées
6. Utilisation des équations de Lagrange pour déterminer des inconnues de liaison
   - 6.1 le principe
   - 6.2 exemple du pendule simple
7. Intégrales premières
   - 7.1 Intégrale première linéaire par rapport aux $\dot{q}_i$
   - 7.2 Intégrale première de Painlevé
8. Synthèse

Exercices d'application

1 Principe des travaux (puissances) virtuel(le)s

1.Préambule : différentielles et dérivées virtuelles

1.1Différentielles virtuelles

soit une fonction de $n+1$ variables $q_1,q_2,...q_n,t$: $f(q_i , t)$
sa différentielle réelle est :

$$df = \sum_1^n (\frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i) + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

où dq_i et dt sont les différentielles des q_i et t.
Si t est le temps, les variations des paramètres q_i s'effectuent suivant des lois $q_i=q_i(t)$ et f est finalement une fonction du temps par l'intermédiaire des q_i.
Par définition, on appellera différentielle virtuelle de f à l'instant t l'expression :

$$df^* = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i^*$$

par rapport à l'expression précédente, le temps est « figé », $dt=0$

exemple :

$$f(x,\psi,t) = x\sin(\omega t + \varphi)$$
$$df = \sin(\omega t + \varphi)dx + x\cos(\omega t + \varphi)(d\psi + \omega dt)$$
$$df^* = \sin(\omega t + \varphi)dx^* + x\cos(\omega t + \varphi)d\psi^*$$

1.3 Dérivée virtuelle

soit une fonction de $n+1$ variables $q_1, q_2,...q_n, t$: $f(q_i , t)$
sa dérivée réelle est :

$$f' = \sum_1^n (\frac{\partial f}{\partial q_i} q_i') + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

où les q_i' sont les dérivées des $q_i(t)$.
Par définition, on appellera dérivée virtuelle de f à l'instant t figé l'expression :

$$f'^* = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i} q_i'^*$$

exemple :

$$f(x,\psi,t) = x\sin(\omega t + \varphi)$$
$$f' = x'\sin(\omega t + \varphi) + (\omega + \varphi')x'\cos(\omega t + \varphi)$$
$$f'^* = x'^*\sin(\omega t + \varphi) + \varphi'^* x'\cos(\omega t + \varphi)$$

2. Déplacement et vitesse virtuels : définitions

2.1 Déplacement virtuel

La position d'un point M est définie par son vecteur position $\overrightarrow{OM}(x_i,t)$.
Si on assimile le déplacement élémentaire (infinitésimal) du point M à sa différentielle réelle :

$$d\overrightarrow{OM} = \sum_1^n (\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_i} dx_i) + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}$$

on peut associer un déplacement virtuel du point M à sa différentielle virtuelle :

$$d\overrightarrow{OM}^* = \sum_1^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_i} dx_i^* = \delta\vec{M}$$

le déplacement virtuel est généralement noté : $\overrightarrow{\delta M}$

2.2 Vitesse virtuelle

Par un raisonnement analogue au précédent, la vitesse réelle du point M s'écrit :

$$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \sum_1^n (\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_i} x_i') + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}$$

On appellera alors vitesse virtuelle du point M la dérivée virtuelle de $\overrightarrow{OM}(x_i,t)$:

$$\vec{V}^*(M) = \sum_1^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_i} x_i'^*$$

3. Travail et puissance virtuels – Principe de d'Alembert

3.1 Définition

Raisonnons sur une particule M.

Le travail virtuel est le résultat du produit scalaire d'une force appliquée à la particule par un déplacement infinitésimal conçu en dehors du temps que nous avons appelé précédemment déplacement virtuel :

1 Principe des travaux (puissances) virtuel(le)s

$$\delta W = \vec{F}(M).\overrightarrow{\delta M}$$

De la même manière, nous pouvons définir la puissance virtuelle comme étant le produit scalaire d'une force appliquée à la particule par sa vitesse virtuelle que nous avons déjà définie :

$$P^* = \vec{F}(M).\vec{V}^*(M)$$

3.2 Principe de d'Alembert

Le principe fondamental appliqué à une particule s'écrit :

$$m.\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Si nous multiplions scalairement par un vecteur $\vec{U}$ les deux membres de l'expression précédente, nous obtenons :

$$m.\vec{a}.\vec{U} = \vec{F}_1.\vec{U} + \vec{F}_2.\vec{U} + ... + \vec{F}_n.\vec{U} \qquad \forall t, \forall \vec{U}$$

Ceci étant vrai pour n'importe quel vecteur $\vec{U}$ et indépendemment du temps nous pouvons écrire par exemple :

$$m.\vec{a}.\overrightarrow{\delta M} = \vec{F}_1.\overrightarrow{\delta M} + \vec{F}_2.\overrightarrow{\delta M} + ... + \vec{F}_n.\overrightarrow{\delta M}$$

où $m.\vec{a}.\overrightarrow{\delta M}$ représente le travail virtuel de la quantité d'accélération et les $\vec{F}_i.\overrightarrow{\delta M}$ le travail virtuel des forces appliquées. On en déduit une première forme du principe de d'Alembert :

> Pour une particule, le travail virtuel de la quantité d'accélération galiléenne est dans tout déplacement virtuel égal à la somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées.

Mais, nous pouvons aussi écrire :

$$m.\vec{a}.\vec{V}^*(M) = \vec{F}_1.\vec{V}^*(M) + \vec{F}_2.\vec{V}^*(M) + ... + \vec{F}_n.\vec{V}^*(M)$$

expression qui traduit une seconde forme du principe de d'Alembert :

> Pour une particule, la puissance virtuelle de la quantité d'accélération galiléenne est dans toute transformation virtuelle égale à la somme des puissances virtuelles de toutes les forces appliquées.

Dans le cadre de la mécanique du solide indéformable, nous devons prendre en compte des champs de déplacement virtuel ou de vitesse virtuelle rigidifiant, c'est à dire vérifiant la relation de Varignon :

$\overrightarrow{\delta A} = \overrightarrow{\delta B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\delta\alpha}$ où par analogie, $\overrightarrow{\delta\alpha}$ sera une rotation virtuelle.

et

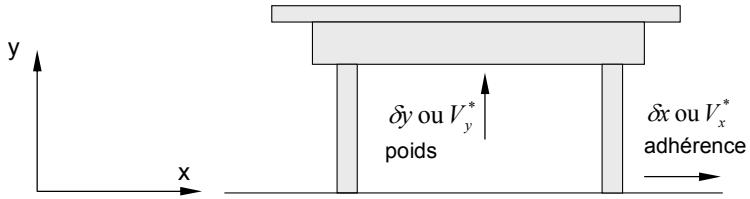
$\vec{V}^*(A) = \vec{V}^*(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}^*$ où par analogie, $\vec{\Omega}^*$ sera un taux de rotation virtuel.

Finalement , le principe de d'Alembert pour un solide, s'écrira :

> le travail virtuel (la puissance virtuelle) de la quantité d'accélération du solide par rapport à un repère galiléen est dans toute transformation virtuelle égale à la somme des travaux virtuels (puissances virtuelles) de toutes les actions mécaniques extérieures appliquées au solide.

3.3 démarche lors de l'application du principe de d'Alembert

Le choix du champ de déplacement virtuel (des vitesses virtuelles) se fait en fonction des efforts que l'on souhaite manipuler. On va donc choisir un champ de déplacement (de vitesses) qui fera « travailler » ces efforts. Prenons l'exemple simpliste d'une table reposant sur ces quatre pieds.

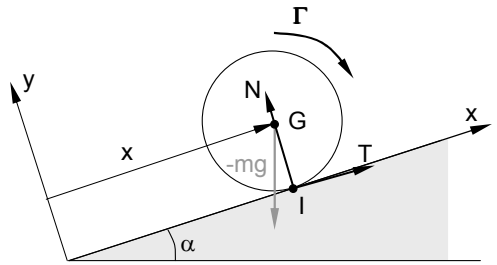


Celle –ci est immobile et aucun effort travaille, par conséquent un observateur extérieur n'a aucune idée des efforts qui agissent sur cette table. Néanmoins, pour évaluer le poids de l'objet, l'observateur essaiera de soulever la table. D'autre part pour évaluer les efforts tangentiels de contact dus à l'adhérence des pieds sur le sol, l'observateur fera glisser la table etc…
Par conséquent, dans le premier cas, si on souhaite écrire une équation faisant intervenir le poids par le principe des travaux (puissances) virtuels, on choisira un déplacement (une vitesse) suivant $\vec{y}$. De la même manière, en choisissant un déplacement (une vitesse) suivant $\vec{x}$, on écrira une équation prenant en compte les efforts tangentiels…

3.4 Application

On se propose de déterminer le couple Γ nécessaire à appliquer à un rouleau cylindrique qui remonte une pente en roulant sans glisser :

1 Principe des travaux (puissances) virtuel(le)s



Le rayon de la base du rouleau et le moment d'inertie du rouleau par rapport à $(G,\vec{z})$ sont notés respectivement *r* et *J*.
D'autre part, seuls *m, α, r, J,* et $\ddot{x}$ sont connus.
L'application du principe fondamental au rouleau dans son mouvement permet d'écrire trois équations :

$$\begin{aligned} T - mg\sin\alpha &= m\ddot{x} \\ N - mg\cos\alpha &= 0 \\ -\Gamma + rT &= -J\ddot{\theta} \end{aligned}$$

aussi la condition de roulement sans glissement en I permet d'écrire une relation entre $\ddot{x}$ et $\ddot{\theta}$, ce qui permet de donner l'expression du couple en fonction des données.

Appliquons le principe des travaux virtuels :

nous devons dans un premier temps déterminer les quantités d'accélération dans le mouvement réel du rouleau, c'est à dire le torseur dynamique du mouvement du rouleau par rapport à la pente :

$$\left\{D_{rouleau/\,pente}\right\}_G = \begin{cases} m\vec{a}(G_{\in rouleau/\,pente}) = m\ddot{x}\vec{x} \\ \vec{\delta}_G(rouleau/\,pente) = -J\ddot{\theta}\vec{z} \end{cases}$$

maintenant, il faut faire « travailler » le couple Γ en choisissant une rotation virtuelle -$\delta\theta$. Mais attention, dans ce mouvement virtuel, la composante tangentielle *T* va aussi travailler et apparaitra dans l'équation :

$$W_{couple\ \Gamma} + W_T = W_{qda}$$

ni le poids, ni la composante normale *N* ne travaille dans ce mouvement virtuel. Ce qui donne :

$$\Gamma\delta\theta - rT\delta\theta = J\ddot{\theta}\delta\theta$$

soit :

$$\Gamma - rT = J\ddot{\theta}$$

Dans cette équation, qu'on a déjà écrite en appliquant le théorème du moment au rouleau en projection sur $\vec{z}$, apparaît *T* qui est une inconnue. Donc l'idée consiste à écrire une autre équation donnant *T* en fonction des grandeurs connues. Faisons « travailler » T en choisissant un déplacement virtuel δx. On écrira alors que dans ce déplacement virtuel :

$$W_T + W_{poids} = W_{qda}$$

Dans le déplacement virtuel retenu, ni le couple Γ, ni la composante normale N ne travaille. On obtient alors :

$$T\delta x - mg\sin\alpha\delta x = m\ddot{x}\delta x$$

soit :

$$T - mg\sin\alpha = m\ddot{x}$$

On retrouve l'équation issue de l'application du théorème de la résultante en projection sur $\vec{x}$.
Pour finir, il suffit d'écrire la condition de roulement sans glissement en I, ce qui permet de donner l'expression du couple en fonction des données.

Dans le cas de l'application du principe des puissances virtuelles, la démarche est exactement identique à la précédente : on écrira deux équations en considérant dans un premier temps une vitesse de rotation virtuelle $-\dot{\theta}^*$ portée par $\vec{z}$ puis dans un second temps une vitesse virtuelle $\dot{x}^*$ suivant $\vec{x}$.

Soit :

$$\Gamma\dot{\theta}^* - rT\dot{\theta}^* = J\ddot{\theta}\dot{\theta}^* \qquad T.\dot{x}^* - mg\sin\alpha.\dot{x}^* = m\ddot{x}.\dot{x}^*$$

En effet, on écrit que la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle des actions extérieures.

Déterminons la puissance virtuelle des quantités d'accélération :

pour un solide *S* en mouvement par rapport à *R* on aura :

$$P^*(\vec{a},S/R) = \int_S \vec{a}(P/R).\vec{V}^*(P)dm$$

or, le champ des vitesses virtuelles étant rigidifiant pour un solide, on a :

$$\vec{V}^*(P) = \vec{V}^*(G) + \overrightarrow{PG}\wedge\vec{\Omega}^*$$

soit :

1 Principe des travaux (puissances) virtuel(le)s

$$P^*(\vec{a},S/R)=\int_S \vec{a}(P/R).\vec{V}^*(G)dm+\int_S \vec{a}(P/R).\left[\overrightarrow{PG}\wedge\Omega^*\right]dm$$

c'est à dire :

$$P^*(\vec{a},S/R)=m\vec{a}(G/R).\vec{V}^*(G)+\vec{\delta}_G(S/R).\vec{\Omega}^*$$

dans le cas qui nous intéresse on a d'une part :

$$P^*(\vec{a},rouleau/pente)=m\ddot{x}\dot{x}^*+J\ddot{\theta}\dot{\theta}^*$$

et d'autre part :

$$P^*(\overline{rouleau}\to rouleau/pente)=(T-mg\sin\alpha.)\dot{x}^*-(rT-\Gamma)\dot{\theta}^*$$

D'où les résultats obtenus précédemment.

Nous venons de raisonner de manière intuitive. La démarche peut être plus systématique. Elle consiste à écrire la vitesse réelle d'un point du solide, de choisir une transformation virtuelle compatible avec les liaisons, et de calculer les différents travaux ou différentes puissances :

déterminons le torseur cinématique du mouvement du rouleau par rapport à la pente :

$$\left\{V_{rouleau/pente}\right\}_G=\begin{cases}\vec{\Omega}_{(rouleau/pente)}=-\dot{\theta}\vec{z}\\ \vec{V}_{(G\in rouleau/pente)}=\dot{x}\vec{x}\end{cases}$$

On en déduit les éléments virtuels compatibles :

- le torseur cinématique virtuel : $\left\{V^*_{rouleau/pente}\right\}_G=\begin{cases}\vec{\Omega}^*_{(rouleau/pente)}=-\dot{\theta}^*\vec{z}\\ \vec{V}^*_{(G\in rouleau/pente)}=\dot{x}^*\vec{x}\end{cases}$

- le torseur de déplacement virtuel : $\left\{\delta_{rouleau/pente}\right\}_G=\begin{cases}\delta\vec{\theta}_{(rouleau/pente)}=-\delta\theta\vec{z}\\ \delta\vec{G}_{(G\in rouleau/pente)}=\delta x\vec{x}\end{cases}$

Ensuite, il faut mettre en place le torseur des actions mécaniques extérieures au rouleau :

$$\left\{T_{\overline{rouleau}\to rouleau}\right\}_G=\begin{cases}\vec{R}_{(\overline{rouleau}\to rouleau)}=(T-mg\cos\alpha)\vec{x}+(N-mg\sin\alpha)\vec{y}\\ \vec{M}_{G(\overline{rouleau}\to rouleau)}=(-\Gamma+rT)\vec{z}\end{cases}$$

et le torseur dynamique :

$$\left\{D_{rouleau/pente}\right\}_G=\begin{cases}m\vec{a}(G_{\in rouleau/pente})=m\ddot{x}\vec{x}\\ \vec{\delta}_G(rouleau/pente)=-J\ddot{\theta}\vec{z}\end{cases}$$

Maintenant on calcule les différents travaux virtuels :

- le travail virtuel des actions extérieures :

$$\left\{T_{\overline{rouleau}\to rouleau}\right\}_G.\left\{\delta_{rouleau/pente}\right\}_G=(T-mg\sin\alpha)\delta x-(-\Gamma+rT)\delta\theta$$

- le travail virtuel des quantités d'accélération :

$$\left\{D_{rouleau/pente}\right\}_G.\left\{\delta_{rouleau/pente}\right\}_G=m\ddot{x}\delta x+J\ddot{\theta}\delta\theta$$

ou des différentes puissances virtuelles :

- le travail virtuel des actions extérieures :

$$\left\{T_{\overline{rouleau}\to rouleau}\right\}_G.\left\{V^*_{rouleau/pente}\right\}_G=(T-mg\sin\alpha)\dot{x}^*-(-\Gamma+rT)\dot{\theta}^*$$

- le travail virtuel des quantités d'accélération :

$$\left\{D_{rouleau/pente}\right\}_G.\left\{V^*_{rouleau/pente}\right\}_G=m\ddot{x}\dot{x}^*+J\ddot{\theta}\dot{\theta}^*$$

On en déduit, compte tenu du principe de d'Alembert :

$$m\ddot{x}\delta x+J\ddot{\theta}\delta\theta=(T-mg\sin\alpha)\delta x-(rT-\Gamma)\delta\theta$$

ou

$$m\ddot{x}\dot{x}^*+J\ddot{\theta}\dot{\theta}^*=(T-mg\sin\alpha)\dot{x}^*-(rT-\Gamma)\dot{\theta}^*$$

soit :

$$\Gamma-rT=J\ddot{\theta}$$

$$T-mg\sin\alpha=m\ddot{x}$$

1 Principe des travaux (puissances) virtuel(le)s

Exercice d'application (durée estimée 2 heures)

Extrait de l'épreuve de physique de l'agrégation externe de mécanique de 1991

Soit un double pendule représenté sur la figure ci-dessous. On se propose d'appliquer le principe des puissances virtuelles :

- pour calculer la valeur des couples moteur C_1 et C_2 à installer sur chaque axe d'articulation pour obtenir des trajectoires imposées,
- pour déterminer la tension dans le premier pendule,

1. Calculs préalables

1.1 calculer l'expression vectorielle de la vitesse réelle, en projection dans R_1, du centre d'inertie G_1 et la vitesse virtuelle compatible avec les liaisons. G_1 est défini par $\overrightarrow{OG_1} = b_1\vec{z}_1$ avec $\vec{z}_1$ vecteur colinéaire à $\overrightarrow{O_1O_2}$ et $\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right| = a_1$.

1.2 calculer l'accélération $\vec{a}_{G_1}$ accélération de G_1 en projection dans R_1.

1.3 Calculer l'expression vectorielle des vitesses réelles et virtuelles de G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = b_2\vec{z}_2$ avec $\vec{z}_2$ vecteur colinéaire à $\overrightarrow{O_1E_2}$. Projeter dans R_1.

1.4 Calculer l'accélération $\vec{a}_{G_2}$ accélération de G_2 en projection dans R_1.

1.5 Déterminer la puissance virtuelle dissipée par les forces d'inertie en G_1 et en G_2. Dans la suite du problème on supposera que la force d'inertie en G_2 est négligeable par rapport à la force d'inertie en G_1.

1.6 Déterminer la puissance virtuelle dissipées par les raideurs en rotation K_1 et K_2 des paliers en O_1 et O_2.

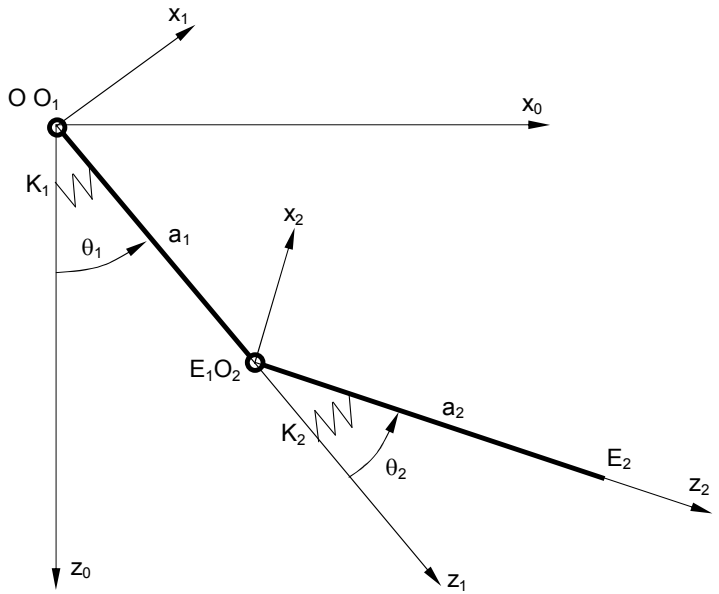
1.7 Déterminer la puissance virtuelle dissipée par les moteurs installés sur les axes $(O_1, \vec{y}_1)$ et $(O_2, \vec{y}_2)$ délivrant les couples C_1 et C_2.

2. Calcul des couples moteurs C_1 et C_2

2.1 Calculer les couples C_1 et C_2 à installer en O_1 et O_2 pour obtenir les trajectoires imposées en E_1 et E_2, et vaincre les pesanteur en G_1 et G_2, les inerties (en G_1 uniquement), les raideurs K_1 et K_2.

3. Calcul de la tension dans le pendule S_1

3.1 S_1 représente la barre O_1O_2 du double pendule. Pour le calcul de la tension T, on crée une vitesse virtuelle d'élongation $\dot{a}^*\vec{z}_1$. Que deviennent les vitesse virtuelles de G_1 et de G_2 ?
Ecrire le principe des puissances virtuelles. Montrer qu'on retrouve C_1 et C_2 et qu'on peut calculer T.



2 Equations de Lagrange

Le formalisme de Lagrange constitue la base de la mécanique analytique. C'est un outil qui permet d'écrire les mêmes équations que lors de l'application des théorèmes généraux ; elles n'apportent rien de plus. Cependant, suivant les cas, l'écriture des équations de Lagrange sera mieux adaptée. En effet, ce formalisme prend en compte la globalité du système étudié à partir de son énergie cinétique contrairement à l'application des théorèmes généraux qui doit tenir compte de certains isolements et qui impose une stratégie réfléchie.
La méthode de mise en équation d'un problème par les équations de Lagrange basée sur l'emploi des transformations virtuelles est systématique. Elle est bien adaptée pour la détermination des équations de mouvement.

Le présent feuillet introduit les équations de Lagrange à partir du calcul des puissances virtuelles.

1. Rappels : principe de d'Alembert et puissance virtuelle

Considérons un point matériel *P* de masse *dm* appartenant à un système *S* . Le principe de d'Alembert se traduit par l'équation suivante :

$$d\vec{F}_e + d\vec{F}_i = \vec{a}.dm$$

avec :

- $d\vec{F}_e$ qui représente l'action extérieure au système auquel appartient *P*,
- $d\vec{F}_i$ qui représente l'action intérieure, c'est à dire l'action sur *P* des autres éléments de S
- $\vec{a}$ qui est l'accélération galiléenne de *P*.

il apparaît évident que l'on peut multiplier les deux membres de cette équation fondamentale par un vecteur arbitraire et par la vitesse virtuelle de *P*, $\vec{V}^*(P)$, en particulier :

> la puissance virtuelle de la quantité d'accélération du système par rapport à un repère galiléen est dans toute transformation virtuelle égale à la somme des puissances virtuelles de toutes les actions mécaniques extérieures appliquées au système et de toutes les actions mécaniques intérieures. Soit :
>
> $$P^*_{qda} = P^*_e + P^*_i$$

2. Vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant t

Le terme « liaison » employé ici doit être pris au sens « d'équation de liaison ». D'autre part, nous allons voir dans ce paragraphe une classe particulière de transformations virtuelles qui respectent les liaisons imposées au système.

2.1 Configuration du système à l'instant t

Dans tout ce qui suit on admettra que le système étudié peut être paramétré par *n* paramètres généralisés $q_1,...,q_i,...,q_n$, indépendants ou non . Les paramètres généralisés sont déduits des paramètres primitifs en prenant en compte les liaisons géométriques ou holonômes. Aussi, ces paramètres peuvent être liés par des liaisons non-holonômes, notamment en présence de roulement sans glissement.
Ainsi, le vecteur position de tout point *P* appartenant au système est défini par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(q_1,...,q_i,...q_n)$$

2.2 Liaisons imposées au système

Il convient ici de classer les liaisons en deux catégories comme nous l'avons vu précédemment :

- les liaisons holonômes (ou géométriques) et,
- les liaisons non-holonômes (ou cinématiques)

La distinction entre ces deux types de liaison tient une grande place dans la théorie de Lagrange.

2.2.1 les liaisons holonômes

Dans ce cas, si on considère leur nombre égal à *h,* les équations de liaisons holonômes sont de la forme :

$$f_j(q_1,...,q_i,...q_n,t) = 0 \qquad j = 1,...,h$$

2.2.2 les liaisons non-holonômes

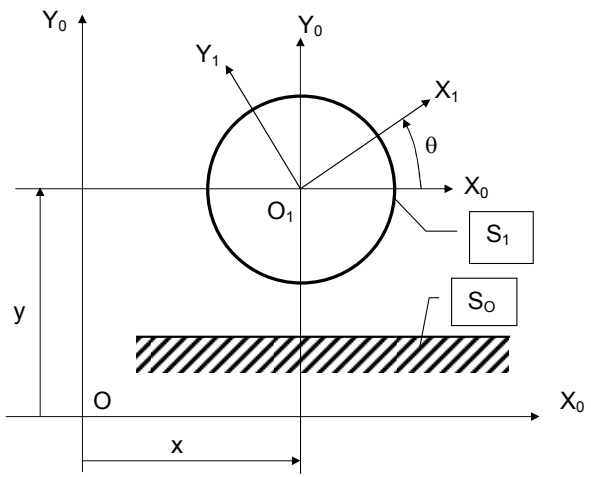
Supposons leur nombre égal à ℓ , les équations de liaisons non-holonômes sont de la forme :

$$a_{j1}\dot{q}_1 + ... + a_{ji}\dot{q}_i + ...a_{jn}\dot{q}_n + b_j = 0 \qquad j = 1,...,\ell$$

2.2.3 exemple

Pour mieux comprendre ce que sont ces liaisons, prenons l'exemple classique d'une roue de rayon *R*, qui roule sans glisser sur un plan horizontal, système dans lequel nous retrouvons une liaison holonôme et une liaison non-holonôme .

2 Equations de Lagrange



Le mouvement plan de la roue est paramétré par trois paramètres primitifs *x*, *y*, et θ.

Le contact entre S_1 et S_0 impose que : $y = R$ qui est l'équation d'une liaison holonôme.

Cette équation permet de réduire le nombre de paramètres primitifs à deux paramètres généralisés : $q_1 = x$ et $q_2 = \theta$

Or dans le mouvement de S_1 par rapport à S_0, ces deux paramètres généralisés sont liés.
En effet, le roulement sans glissement au point de contact entre S_1 et S_0 impose que : $\dot{x} + R\dot{\theta} = 0$ qui est l'équation d'une liaison non-holonôme .

Remarque :

> cette dernière équation s'intègre facilement pour donner l'équation : $x + R\theta = 0$ (conditions initiales nulles) qui est celle d'une liaison holonôme ; on dira alors que la liaison est semi-holonôme.
>
> D'autre part, on retiendra que la présence d'un roulement sans glissement implique une liaison non-holonôme.

2.3 Vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant t

Les liaisons holonômes peuvent s'écrire de la manière suivante en les dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + ... + \frac{\partial f_j}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad j = 1,...,h$$

On constate alors qu'elles ont la même forme que les liaisons non-holonômes :

$$a_{j1}\dot{q}_1 + ... + a_{ji}\dot{q}_i + ...a_{jn}\dot{q}_n + b_j = 0 \qquad j = 1,...,\ell$$

On appellera « vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons » les $\dot{q}_i^*$ qui vérifient les équations précédentes sachant que les vitesses virtuelles sont indépendantes du temps. On aura alors :

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_1}\dot{q}_1^* + ... + \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\dot{q}_i^* + ... + \frac{\partial f_j}{\partial q_n}\dot{q}_n^* = 0 \quad \text{avec} \quad j = 1,...,h$$

et

$$a_{j1}\dot{q}_1^* + ... + a_{ji}\dot{q}_i^* + ...a_{jn}\dot{q}_n^* = 0 \qquad j = 1,...,\ell$$

2.3.1 Exemples

exemple 1

Reprenons l'exemple précédent de la roue qui roule sans glisser sur un plan horizontal. Nous avons écrit deux équations de liaison. Choisir des vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons consiste à écrire que les $\dot{q}_i^*$ doivent vérifier ces équations. Soit :

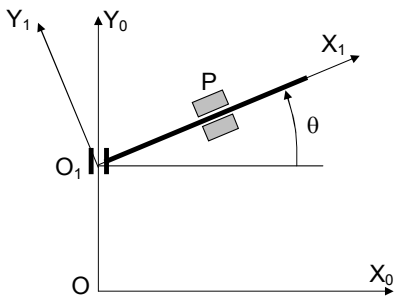
$y = R$ c'est à dire $\dot{y} = 0$, qui implique $\dot{y}^* = 0$
et $\dot{x} + R\dot{\theta} = 0$, qui implique $\dot{x}^* + R\dot{\theta}^* = 0$

exemple 2

Considérons un point matériel *P* pouvant se déplacer sur une tige *T* animée d'un mouvement de translation suivant $(O, \vec{y}_0)$. On a :

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}at^2.\vec{y}_0$$

On cherche à déterminer la vitesse virtuelle compatible avec la liaison telle qu'elle existe à l'instant *t* . On pose $\overrightarrow{OP} = x.\vec{x}_0 + y.\vec{y}_0$
Ici, *x* et *y* sont liés.



Ecrivons l'équation de liaison, c'est à dire l'équation donnant *y* en fonction de *x*. On a :

$$y = \frac{1}{2}at^2 + x\tan\theta$$

cette équation holonôme s'écrit aussi : $y - x\tan\theta - \frac{1}{2}at^2 = 0 \qquad (f(x,y,t))$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient une relation entre les vitesses réelles :

$$\dot{y} - \dot{x}\tan\theta - at = 0$$

Par conséquent, les vitesses virtuelles compatibles avec la liaison holonôme doivent vérifier cette équation, soit :

$$\dot{y}^* - \dot{x}^*\tan\theta = 0$$

3. Puissance virtuelle développée par les actions mécaniques

3.1 Forme générale de la puissance

Soit un système de forces appliquées à un système quelconque. $d\vec{F} = dF_x\vec{x} + dF_y\vec{y} + dF_z\vec{z}$ désigne l'une de ces forces appliquées en P tel que $\overrightarrow{OP} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$

Aussi, le système est paramétré par les *n* paramètres $q_1,...,q_i,...,q_n$ donc :

$$x = x(q_1,...,q_i,...q_n)$$
$$y = y(q_1,...,q_i,...q_n)$$
$$z = z(q_1,...,q_i,...q_n)$$

La puissance virtuelle développée par la force $d\vec{F}$ est :

$$dP^* = d\vec{F}.\vec{V}^*(P) \text{ avec } \vec{V}^*(P) = \dot{x}^*.\vec{x} + \dot{y}^*.\vec{y} + \dot{z}^*.\vec{z}$$

Or

$$\dot{x}^* = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1^* + ... + \frac{\partial x}{\partial q_i}\dot{q}_i^* + ... + \frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n^*$$
$$\dot{y}^* = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1^* + ... + \frac{\partial y}{\partial q_i}\dot{q}_i^* + ... + \frac{\partial y}{\partial q_n}\dot{q}_n^*$$
$$\dot{z}^* = \frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1^* + ... + \frac{\partial z}{\partial q_i}\dot{q}_i^* + ... + \frac{\partial z}{\partial q_n}\dot{q}_n^*$$

D'où la nouvelle expression de la puissance virtuelle développée par la force $d\vec{F}$:

$$dP^* = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}dF_x + \frac{\partial y}{\partial q_1}dF_y + \frac{\partial z}{\partial q_1}dF_z\right).\dot{q}_1^* + ... + \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}dF_x + \frac{\partial y}{\partial q_i}dF_y + \frac{\partial z}{\partial q_i}dF_z\right).\dot{q}_i^* + ...$$
$$... + \left(\frac{\partial x}{\partial q_n}dF_x + \frac{\partial y}{\partial q_n}dF_y + \frac{\partial z}{\partial q_n}dF_z\right).\dot{q}_n^*$$

Ce qui nous amène à l'expression de la puissance virtuelle développée par toutes les forces :

$$P^* = q_1^*\int_\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}dF_x + \frac{\partial y}{\partial q_1}dF_y + \frac{\partial z}{\partial q_1}dF_z\right) + ... + \dot{q}_i^*\int_\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial q}dF_x + \frac{\partial y}{\partial q_i}dF_y + \frac{\partial z}{\partial q_i}dF_z\right) + ...$$
$$... + \dot{q}_n^*\int_\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial q_n}dF_x + \frac{\partial y}{\partial q_n}dF_y + \frac{\partial z}{\partial q_n}dF_z\right)$$

En posant : $Q_i = \int_\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}dF_x + \frac{\partial y}{\partial q_i}dF_y + \frac{\partial z}{\partial q_i}dF_z\right)$

On obtient :

$$P^* = Q_1\dot{q}_1^* + ... + Q_i\dot{q}_i^* + ... + Q_n\dot{q}_n^*$$

Cette expression est importante dans l'application de la théorie de Lagrange. Nous verrons comment dans la pratique nous pouvons calculer les Q_i en envisageant des cas particuliers. Ces termes sont appelés coefficients énergétiques, coefficients de puissance ou encore forces généralisées associés aux q_i.

4 Puissance virtuelle développée par les quantités d'accélération

La puissance virtuelle développée par les quantités d'accélération s'écrit :

$$P^*_{qda} = \int_S \vec{a}(P).\vec{V}^*(P)dm$$

d'autre part le système est paramétré par les *n* paramètres $q_1,...,q_i,...,q_n$ donc :

$$x = x(q_1,...,q_i,...q_n)$$
$$y = y(q_1,...,q_i,...q_n)$$
$$z = z(q_1,...,q_i,...q_n)$$

Et $\overrightarrow{OP} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$

Or

$$\dot{x}^* = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1^* + ... + \frac{\partial x}{\partial q_i}\dot{q}_i^* + ... + \frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n^*$$
$$\dot{y}^* = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1^* + ... + \frac{\partial y}{\partial q_i}\dot{q}_i^* + ... + \frac{\partial y}{\partial q_n}\dot{q}_n^*$$
$$\dot{z}^* = \frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1^* + ... + \frac{\partial z}{\partial q_i}\dot{q}_i^* + ... + \frac{\partial z}{\partial q_n}\dot{q}_n^*$$

c'est à dire : $\vec{V}^*(P) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}\dot{q}_1^* + ... + \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}\dot{q}_i^* + ... + \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_n}\dot{q}_n^*$

$$P^*_{qda} = \dot{q}_1^*.\int_\Sigma \vec{a}.\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}dm + ... + \dot{q}_i^*.\int_\Sigma \vec{a}.\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}dm + ... + \dot{q}_n^*.\int_\Sigma \vec{a}.\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_n}dm$$

En posant : $A_i = \int_\Sigma \vec{a}.\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}dm$

On a :

$$P^*_{qda} = A_i.\dot{q}_i^*$$

L'idée de Lagrange a été de proposer un calcul systématique des coefficients A_i à partir de l'énergie cinétique du système.

Alors poursuivons le calcul. On a : $A_i = \int_\Sigma \vec{a}.\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}.dm$ et $\vec{a}(P) = \frac{d}{dt}\vec{V}(P)$

Nous pouvons écrire : $\vec{a}(P).\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i} = [\frac{d}{dt}\vec{V}(P)].\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}$

Mais : $\frac{d}{dt}[\vec{V}(P).\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}] = [\frac{d}{dt}\vec{V}(P)].\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i} + \vec{V}(P).[\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i})]$

Et d'autre part en dérivant $\vec{V}(P) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}\dot{q}_i + ... + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ par rapport au $\dot{q}_i$ on trouve le résultat suivant : $\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}$

Aussi, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_j + ... + \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial q_n \partial q_i}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t \partial q_i}$

Soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_j}\dot{q}_j + ... + \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_n}\dot{q}_n + ... + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial q_i}$

Par conséquent

$$\vec{a}(P).\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}(P).\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{V}(P)\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{V}^2(P)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \vec{V}^2(P)}{\partial q_i}\right]$$

d'où l'expression des coefficients A_i :

$$A_i = \int_S \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{V}^2(P)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \vec{V}^2(P)}{\partial q_i}\right].dm = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\int_S \frac{1}{2}\vec{V}^2(P).dm\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\int_S \frac{1}{2}\vec{V}^2(P).dm\right)$$

dans laquelle apparaît clairement l'énergie cinétique du système $T = \int_S \frac{1}{2}\vec{V}^2(P).dm$:

$$A_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

5 Forme générale des équations de Lagrange

5.1 Nouvelle écriture du principe de d'Alembert

Le principe de d'Alembert s'écrit pour une transformation virtuelle quelconque :

$$A_1\dot{q}_1^* + ... + A_i\dot{q}_i^* + ... + A_n\dot{q}_n^* = Q_1\dot{q}_1^* + ... + Q_i\dot{q}_i^* + ... + Q_n\dot{q}_n^*$$

soit

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right).\dot{q}_i^* = 0 \quad \forall q_i^*$$

5.2 Choix des vitesses virtuelles

Si les $\dot{q}_i^*$ respectent toutes les liaisons holônomes sans respecter les liaisons non-holonômes, elles sont linéairement indépendantes (les vitesses virtuelles sont compatibles avec les liaisons holônomes) et nous pourrons écrire un système de *n* équations indépendantes, appelées équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_n}=Q_n$$

Si les $\dot{q}_i^*$ sont de plus compatibles avec les liaisons non-holonômes, c'est à dire respectent les ℓ équations de liaison :

$$a_{j1}\dot{q}_1^*+...+a_{ji}\dot{q}_i^*+...a_{jn}\dot{q}_n^*=0 \qquad j=1,...,\ell$$

alors les $\dot{q}_i^*$ ne sont plus linéairement indépendants et nous verrons que la détermination des Q_i se fait différemment.

Par conséquent, on retiendra que l'écriture des équations de Lagrange dépend du choix des vitesses virtuelles.

D'autre part, les Q_i sont les composantes de forces généralisées qui peuvent avoir plusieurs origines. Nous écrirons par exemple :

$$Q_i=Q_i^{Le}+Q_i^{Li}+Q_i^{D}$$

avec :

- Q_i^{Le}, force généralisée issue des actions de liaisons extérieures,
- Q_i^{Li}, force généralisée issue des actions de liaisons intérieures,
- Q_i^{D}, force généralisée issue des actions données (connues).

Exemple de la roue qui roule sans glisser sur un plan horizontal

Nous choisissons des vitesses virtuelles uniquement compatibles avec les liaisons holonômes et respectant l'indéformabilité de la roue:

$$\left\{V^*_{(roue/\,plan)}\right\}_G=\begin{cases}\dot{\theta}^*\vec{z}\\ \dot{x}^*\vec{x}\end{cases}$$

l'énergie cinétique vaut : $2T=m\dot{x}^2+J\dot{\theta}^2$
d'autre part :

$P^*_{Le}=X(\dot{x}^*+R\dot{\theta}^*)$ résultat du comoment $\left\{T_{plan\to roue}\right\}\left\{V^*_{(roue/\,plan)}\right\}$

$P^*_{Li}=0$ le système est constitué que d'un seul solide,

$P^*_D=P^*_{pesanteur}=0$

d'où les 2 équations de Lagrange :

- $\mathscr{L}$ (x) : $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$ soit $m\ddot{x}=X$
- $\mathscr{L}$ (θ) : $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_\theta$ soit $J\ddot{\theta}=RX$

5.3 Calcul de la puissance virtuelle dans quelques cas particuliers courants

5.3.1 Puissance virtuelle développée par les actions mécaniques appliquées à un solide parfait dans une transformation virtuelle.

Le torseur des actions mécaniques appliquées est : $\left\{T_{\bar{S}\to S}\right\}_M=\begin{cases}\vec{R}\\ \vec{M}_M(\bar{S}\to S)\end{cases}$

Le solide étant parfait, c'est à dire indéformable, le champ des vitesses réelles vérifient la relation de Varignon : il est équiprojectif donc c'est un champ de moment.
On a alors : $\vec{V}(P)=\vec{V}(M)+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{MP}$

Pour une transformation virtuelle compatible avec l'indéformabilité, le champ des vitesses virtuelles doit lui aussi être équiprojectif : c'est un champ rigidifiant.
On aura donc : $\vec{V}^*(P)=\vec{V}^*(M)+\vec{\Omega}^*\wedge\overrightarrow{MP}$

Par conséquent, la puissance virtuelle sera égale au comoment du torseur correspondant aux actions mécaniques extérieures et du torseur correspondant aux vitesses virtuelles :

$$P^*=\vec{R}.\vec{V}^*(M)+\vec{M}_M(\bar{S}\to S).\vec{\Omega}^*$$

5.3.2 Puissance virtuelle développée par les actions de liaisons intérieures dans une transformation virtuelle

Soient S_1 et S_2 deux solides en liaison mutuelles. Si cette liaison se fait par contact direct entre S_1 et S_2 alors, les actions de S_1 sur S_2 et de S_2 sur S_1 admettent des torseurs opposés en vertu du principe d'action et de réaction. Dans ces conditions, pour les champs de vitesses virtuels :

$$\left\{V^*_{S_1/Rg}\right\} \text{ et } \left\{V^*_{S_2/Rg}\right\}$$

la puissance virtuelle dans *Rg* des inter-efforts de liaison vaut :

$$P^*_{S_1\leftrightarrow S_2/Rg} = \left\{T_{S_1\to S_2}\right\}\left\{V^*_{S_2/Rg}\right\} + \left\{T_{S_2\to S_1}\right\}\left\{V^*_{S_1/Rg}\right\} = \left\{T_{S_1\to S_2}\right\}\left\{V^*_{S_2/S_1}\right\} = \left\{T_{S_2\to S_1}\right\}\left\{V^*_{S_1/S_2}\right\}$$

Si on respecte la liaison entre S_1 et S_2 telle qu'elle existe à l'instant t, la puissance virtuelle est nulle dans deux cas :

- si la liaison est non-dissipative (absence de frottement dans une liaison parfaite)
- si dans la transformation virtuelle on a roulement sans glissement entre S_1 et S_2 et que les moments de roulement et de pivotement sont nuls.

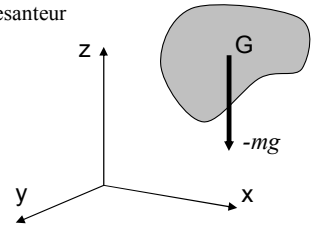
5.3.3 Puissance virtuelle développée par les actions données dérivant d'un potentiel dans une transformation virtuelle

Les actions données dérivent d'un potentiel ou d'une fonction de forces si $Q_i^D = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$

$V(q_1,...,q_i,...q_n,t)$, est appelée fonction potentielle.

Exemples fondamentaux en mécanique du solide :

- Action de la pesanteur

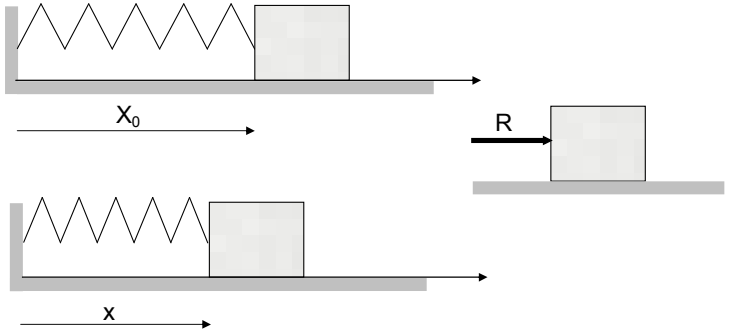


On a : $P^*_{pesanteur} = -mg\vec{z}.\vec{V}^*_{G/Rg}$

si $\vec{V}^*_{G/Rg} = \dot{x}^*\vec{x} + \dot{y}^*\vec{y} + \dot{z}^*\vec{z}$ alors $P^*_{pesanteur} = -mg\dot{z}^*$ c'est à dire $Q_i = -mg$

On en déduit la fonction potentielle : $V = mgz$ z étant la cote du centre de gravité

- Action délivrée par un ressort



On a : $P^*_{ressort} = \vec{R}.\vec{V}^* = k\Delta x\dot{x}^* = -k(x-x_0)\dot{x}^*$ c'est à dire $Q_i = -k(x-x_0)$

On en déduit la fonction potentielle : $V = \dfrac{1}{2}k(x-x_0)^2$ k étant la constante de raideur du ressort.

5.3.4 Cas des systèmes à liaisons parfaites pour lesquels les forces données dérivent toutes d'un potentiel

Dans ces conditions Q_i^{Le} et Q_i^{Li} sont nuls et $Q_i^D = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$.

Par conséquent, pour une transformation virtuelle compatible avec les liaisons holonômes les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad i = 1,...,n$$

Posons $L = T - V$

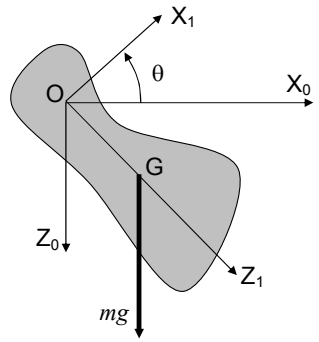
On a $-\dfrac{\partial T}{\partial q_i} + \dfrac{\partial V}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$, et d'autre part, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ puisque V ne dépend que des q_i.

On obtient alors les n équations :

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ où la fonction L est appelée fonction de Lagrange ou lagrangien

exemple du pendule simple en articulation parfaite avec un bâti.

On pose $\overrightarrow{OG} = d.\vec{z}_1$



Le système est non-dissipatif et les actions données, ici l'action de la pesanteur, dérive d'un potentiel, par conséquent l'équation de Lagrange se détermine à partir du lagrangien :

$$L = T - V = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta$$

on a :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

qui donne :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgd\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\ddot{\theta}$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$J\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$$

5.4 Equations de Lagrange pour un champ de vitesses virtuelles compatible avec les liaisons holonômes et les liaisons non-holonômes : les multiplicateurs de Lagrange.

Les équations de liaison peuvent se mettre sous la forme générale :

$$f_j(q_1,...,q_i,...q_n,t) = 0 \qquad j = 1,...,h$$

$$a_{j1}\dot{q}_1 + ... + a_{ji}\dot{q}_i + ...a_{jn}\dot{q}_n + b_j = 0 \qquad j = 1,...,\ell$$

Ces relations peuvent se mettre, en dérivant les relations holonômes, sous la forme unique :

$$a_{j1}\dot{q}_1 + ... + a_{ji}\dot{q}_i + ...a_{jn}\dot{q}_n + b_j = 0 \qquad j = 1,...,m \quad \text{avec } m = h + \ell$$

Nous avons vu que les équations de Lagrange pouvaient s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1,...,n$$

Prenons maintenant une transformation virtuelle compatible avec les h liaisons holonômes et les ℓ liaisons non-holonômes, c'est à dire vérifiant les m équations :

$$a_{j1}\dot{q}_1^* + ... + a_{ji}\dot{q}_i^* + ...a_{jn}\dot{q}_n^* = 0 \qquad j = 1,...,m$$

D'autre part, les $\dot{q}_i^*$ doivent vérifier les *n* équations issues du principe de d'Alembert :

$$(A_1 - Q_1')\dot{q}_1^* + ... + (A_i - Q_i')\dot{q}_i^* + ... + (A_n - Q_n')\dot{q}_n^* = 0 \quad i = 1,...,n$$

Ce qui signifie que les *n* dernières équations sont combinaison linéaire des *m* premières, soit :

$$(A_1 - Q_1')\dot{q}_1^* + ... + (A_i - Q_i')\dot{q}_i^* + ... + (A_n - Q_n')\dot{q}_n^* = \sum_{j=1}^{m}\left(a_{j1}\dot{q}_1^* + ... + a_{ji}\dot{q}_i^* + ... + a_{jn}\dot{q}_n^*\right)\lambda_j$$

On en déduit les *n* équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1'+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{j1}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i'+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{ji}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_n}=Q_n'+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{jn}$$

auxquelles il faut ajouter les *m* équations :

$$a_{j1}\dot{q}_1+...+a_{ji}\dot{q}_i+...a_{jn}\dot{q}_n+b_j=0$$

On dispose d'un système à *n+m* équations où les *n* q_i et les *m* λ_j sont les inconnues.

Les coefficients λ_j sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Les termes $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{ji}$ représente la force généralisée correspondant aux actions des liaisons non-holonômes. Par conséquent le calcul des $Q_i'(\neq Q_i)$ se fait en ne prenant pas en compte les puissances virtuelles développées par les actions des liaisons non-holonômes.

Revenons à l'exemple du cylindre qui roule sans glisser sur un plan horizontal

L'équation non-holonôme s'écrit : $\dot{x}+R\dot{\theta}=0$, ce qui implique $\dot{x}^*+R\dot{\theta}^*=0$
D'autre part : $Q_i'=0$
En posant $q_1=x$ et $q_2=\theta$, on en déduit $a_{11}=1$ et $a_{12}=R$ d'où les équations de Lagrange avec multiplicateur :

- (x) : $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=\lambda_1$ soit $m\ddot{x}=X$
- (θ) : $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=R\lambda_1$ soit $J\ddot{\theta}=RX$

Interprétation mécanique du multiplicateur de Lagrange :

Il apparaît clairement dans ces équations que λ_1 correspond d'un point de vue mécanique à la composante de l'action de liaison non-holonôme qui travaille dans les déplacements virtuels δx et $\delta\theta$. Ce résultat peut être généralisé.

5.5 Variante dans la décomposition des forces généralisées

Nous avons vu précédemment que les Q_i sont les composantes de forces généralisées qui peuvent avoir plusieurs origines :

$$Q_i=Q_i^{Le}+Q_i^{Li}+Q_i^{D}$$

avec :

- Q_i^{Le}, force généralisée issue des actions de liaisons extérieures,
- Q_i^{Li}, force généralisée issue des actions de liaisons intérieures,
- Q_i^{D}, force généralisée issue des actions données (connues).

Une autre décomposition est possible. Nous pouvons aussi écrire :

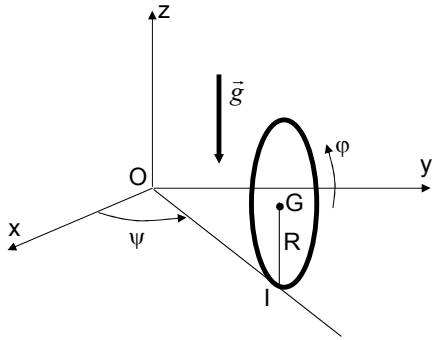
$$Q_i=Q_i^{D}+Q_i^{f}+Q_i^{nh}$$

avec :

- Q_i^{D}, force généralisée issue des actions données (connues).
- Q_i^{f}, force généralisée issue des actions dissipatives (présence de frottement),
- Q_i^{nh}, force généralisée issue des actions de liaisons non-holonômes,

Dans le cas où la transformation virtuelle respecte les liaisons holonômes et non-holonômes, la force généralisée issue des actions de liaisons non-holonômes est $Q_i^{nh}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{ji}$ et par conséquent $Q_i'=Q_i^{D}+Q_i^{f}$

Prenons l'exemple d'un cerceau qui roule sans glisser sur un plan



Ce système est non-dissipatif et non-holonôme.
Il est paramétré par quatre paramètres : x, y, ψ, φ.

2 Equations de Lagrange

Deux approches sont possibles :

- la transformation virtuelle est compatible avec les liaisons holonômes uniquement
- la transformation virtuelle est compatible avec les liaisons holonômes et les liaisons non-holonômes.

Les deux conditions non-holonômes qui traduisent le roulement sans glissement en I s'écrivent :

$$\dot{x} + R\dot{\varphi}\cos\psi = 0 \text{ et } \dot{y} + R\dot{\varphi}\sin\psi = 0$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}R^2\dot{\psi}^2\right)$$

- **Calcul du premier membre des équations de Lagrange :**

	$q_1 = x$	$q_2 = y$	$q_3 = \varphi$	$q_4 = \psi$
$\frac{\partial T}{\partial q_i}$	0	0	0	0
$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$	$m\dot{x}$	$m\dot{y}$	$mR^2\dot{\varphi}$	$\frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$	$m\ddot{x}$	$m\ddot{y}$	$mR^2\ddot{\varphi}$	$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\psi}$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$	$m\ddot{x}$	$m\ddot{y}$	$mR^2\ddot{\varphi}$	$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\psi}$

Calcul du second membre :

- **premier cas : les liaisons non-holonômes ne sont pas prises en compte** (le champ des vitesses virtuelles est compatible avec les seules liaisons holonômes)

on a : $Q_i = Q_i^D + Q_i^f + Q_i^{nh}$

$Q_i^D = 0$ ici la seule action donnée est l'action de la pesanteur qui ne développe pas de puissance dans la transformation virtuelle retenue.

$Q_i^f = 0$ car le système est non dissipatif

$Q_i^{nh} = \vec{R}_{(plan \to cerceau)}.\vec{V}^*_{(I \in cerceau/plan)} = X\dot{x}^* + Y\dot{y}^* + \left(XR\cos\psi + YR\sin\psi\right)\dot{\varphi}^*$

	$q_1 = x$	$q_2 = y$	$q_3 = \varphi$	$q_4 = \psi$
Q_i^D	0	0	0	0
Q_i^f	0	0	0	0
Q_i^{nh}	X	Y	$XR\cos\psi + YR\sin\psi$	0
Q_i	X	Y	$XR\cos\psi + YR\sin\psi$	0

On en déduit les quatre équations de Lagrange :

- $\mathcal{L}$(x) : $m\ddot{x} = X$
- $\mathcal{L}$(y) : $m\ddot{y} = Y$
- $\mathcal{L}(\varphi)$: $mR^2\ddot{\varphi} = XR\cos\psi + YR\sin\psi$
- $\mathcal{L}(\psi)$: $\frac{1}{2}mR^2\ddot{\psi} = 0$

Les équations de mouvement qui par définition ne font pas intervenir d'inconnues de liaison s'obtiennent en remplaçant X et Y par leur valeur dans la troisième équation :

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = cte \qquad \text{et} \qquad \ddot{\varphi} = \frac{1}{R}(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi)$$

- **deuxième cas : les liaisons holonômes et non-holonômes sont prises en compte** (le champ des vitesses virtuelles est compatible avec toutes les liaisons)

Le premier membre des équations de Lagrange est inchangé ainsi que les Q_i^D et les Q_i^f.

Reste alors à calculer les $Q_i^{nh} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji}$

Ici j varie de 1 à 2 et i de 1 à 4

Les équations non-holonômes s'écrivent :

$$a_{11}\dot{x} + a_{12}\dot{y} + a_{13}\dot{\varphi} + a_{14}\dot{\psi} + b_1 = 0$$
$$a_{21}\dot{x} + a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{\varphi} + a_{24}\dot{\psi} + b_2 = 0$$

d'où :

	$q_1 = x$	$q_2 = y$	$q_3 = \varphi$	$q_4 = \psi$
a_{1i}	1	0	$R\cos\varphi$	0
a_{2i}	0	1	$R\sin\varphi$	0
$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji}$	λ_1	λ_2	$\lambda_1 R\cos\varphi + \lambda_2$	0

On en déduit les quatre équations de Lagrange avec multiplicateurs :

- $\mathscr{L}(x)$: $m\ddot{x} = \lambda_1$
- $\mathscr{L}(y)$: $m\ddot{y} = \lambda_2$
- $\mathscr{L}(\varphi)$: $mR^2\ddot{\varphi} = \lambda_1 R\cos\psi + \lambda_2 R\sin\psi$
- $\mathscr{L}(\psi)$: $\frac{1}{2}mR^2\ddot{\psi} = 0$

On retrouve les mêmes équations que dans le cas précédent. Les λ_i correspondent aux composantes de l'action de contact comprises dans le plan.

6 Utilisation des équations de Lagrange pour déterminer des inconnues de liaison

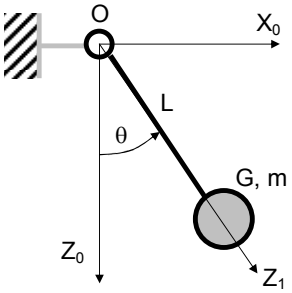
6.1 le principe

Les équations de Lagrange donnent les mêmes résultats que les théorèmes généraux et offrent notamment la possibilité de déterminer des inconnues de liaison. Pour cela il suffit de choisir une transformation incompatible avec la liaison en question, ce qui revient à « rompre » la liaison.

6.2 exemple du pendule simple

La liaison du pendule avec son support est une liaison pivot parfaite. Le mouvement du pendule est défini par θ si on tient compte de la liaison. L'équation du mouvement est alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

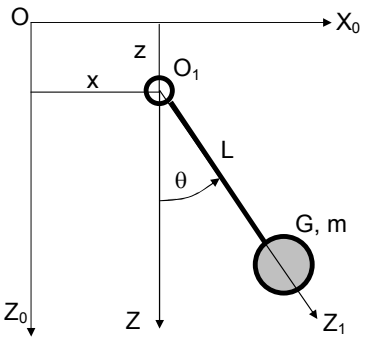


Mais avec un tel paramétrage, il est impossible de déterminer les actions de liaison. Elles ont été éliminées en prenant une transformation virtuelle compatible avec la liaison pivot. Par contre si on choisit une transformation virtuelle qui ne soit plus compatible avec la liaison, les inconnues apparaîtront.

Nous allons donc introduire deux paramètres supplémentaires x, z tels que :

$$\overrightarrow{OO_1} = x\vec{x}_0 + z\vec{z}_0$$

Naturellement nous avons les équations de liaison : $\dot{x} = 0$ et $\dot{z} = 0$



Avec ce nouveau paramétrage, l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - 2L\dot{z}\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

Attention, à ce niveau du calcul de ne pas faire $\dot{x} = 0$ et $\dot{z} = 0$ dans l'expression de T !!!

D'autre part $\vec{R}_{bâti\to pendule} = X\vec{x}_0 + Z\vec{z}_0$

D'où l'expression de la puissance virtuelle : $P^* = X\dot{x}^* + (mg + Z)\dot{z}^* - mgL\dot{\theta}^*\sin\theta$

On obtient alors les trois équations de Lagrange :

- $\mathscr{L}(x)$: $m\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\sin\theta = X$
- $\mathscr{L}(z)$: $m\ddot{z} - mL\ddot{\theta}\sin\theta - mL\dot{\theta}^2\cos\theta = Z + mg$
- $\mathscr{L}(\theta)$: $mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x}\cos\theta - mL\ddot{z}\sin\theta = -mgL\sin\theta$

auxquelles on joint les deux équations de liaison :

- $\dot{x} = 0$
- $\dot{z} = 0$

Finalement, on a :

- $mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\sin\theta = X$
- $-mL\ddot{\theta}\sin\theta - mL\dot{\theta}^2\cos\theta = Z + mg$
- $mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta$

On reconnaît l'équation du mouvement donnée par la troisième équation du système précédent. Celle-ci étant résolue, on déterminera *X* et *Z*.

On peut d'ailleurs avoir facilement *X* et *Z* en fonction de θ et $\dot{\theta}$, ce qui est souvent suffisant dans la pratique.

7 Intégrales premières

7.1 Intégrale première linéaire par rapport aux $\dot{q}_i$

Il est fréquent que pour un *i* donné, l'énergie cinétique ne dépende que des $\dot{q}_i$ et pas des q_i et que le second membre de l'équation de Lagrange correspondante soit nul : $Q_i = 0$.
Cette équation s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Cte$$

et donne une intégrale première linéaire par rapport aux $\dot{q}_i$ évidente.

7.2 Intégrale première de Painlevé

Considérons un système admettant un lagrangien indépendant du temps, soit $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Etudions la fonction $H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$ avec $L = L(q_1,...,q_n,\dot{q}_1,...\dot{q}_n)$

Calculons $\frac{dH}{dt} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] - \frac{dL}{dt}$

Or $\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)$

D'où $$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\dot{q}_i$$

Or lorsque le système admet un lagrangien le terme entre crochets de l'expression précédente est nul (voir § 5.3.4). Par conséquent, la fonction étudiée *H*, est constante :

$$H = Cte$$

Exprimons *H* en fonction de l'énergie cinétique *T* et de la fonction potentielle *V* du système.

On a : $L = T - V$

Donc

$$H = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + V \quad \text{avec} \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

or

$$T = \frac{1}{2}\int_\Sigma \vec{V}^2(P)dm \quad \text{avec} \quad \vec{V}(P) = \sum_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

d'où l'expression de l'énergie cinétique décomposée en une somme de trois termes :

$$T = \frac{1}{2}\int_\Sigma \sum_{i,j} \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j dm + \frac{1}{2}\int_\Sigma \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\sum_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i}\dot{q}_i dm + \frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right)^2 dm$$

T_2 T_1 T_0

Soit $T = T_2 + T_1 + T_0$ avec T_k de degré k en $\dot{q}_i$. On dit que :

- T_2 est la partie quadratique de *T* en $\dot{q}_i$
- T_1 est la partie linéaire de *T* en $\dot{q}_i$
- T_0 est la partie de degré 0 de *T* en $\dot{q}_i$

D'autre part :

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

or T_0 étant indépendant des $\dot{q}_i$, on a : $\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} = 0$

aussi $\sum_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = T_1$ et $\sum_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T_2$

d'où

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T_2 + T_1$$

et $H = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0) + V = Cte$

c'est à dire

$$T_2 - T_0 + V = Cte$$

qui est l'intégrale première de Painlevé.

Si de plus les équations de liaison sont indépendantes du temps, c'est à dire que $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$,

on a $T = T_2$, et par conséquent $T + V = Cte$.

On retrouve alors l'expression qui caractérise la conservation de l'énergie mécanique.

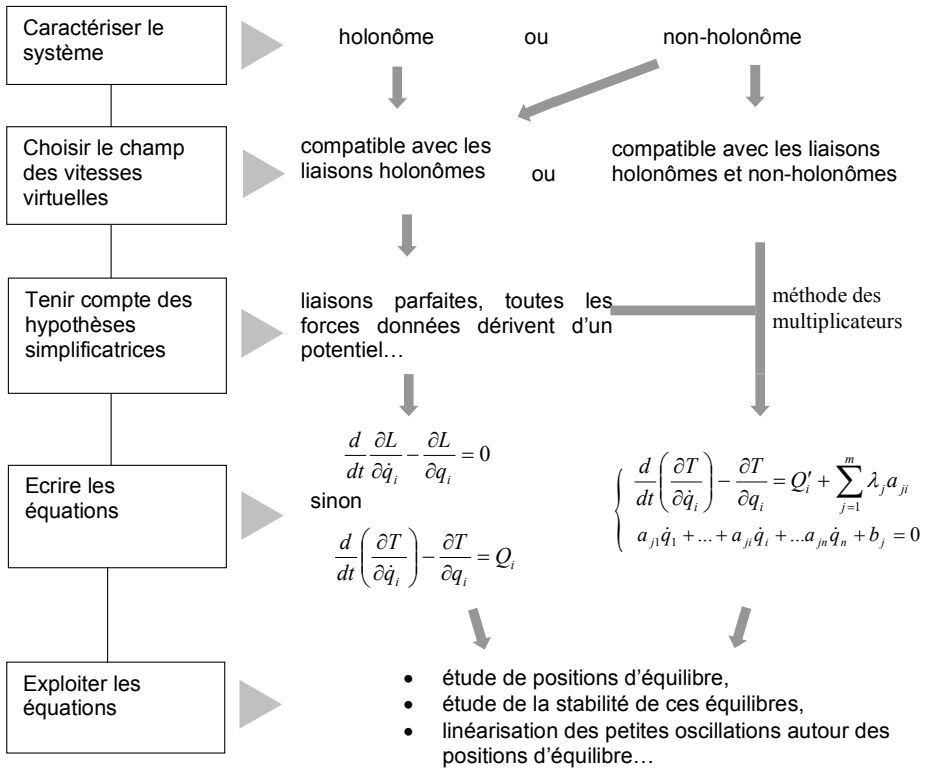
8. Synthèse

Les équations de Lagrange…

Pourquoi ?

Pour écrire les équations de mouvement d'un système, surtout s'il admet un lagrangien…

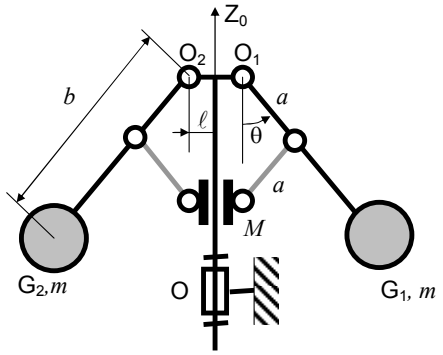
Comment ?



Exercices d'application (durée estimée : 6 heures)

Exercice 1 : régulateur à boules de Watt

Soit le régulateur à boules représenté sur la figure ci-dessous :



On suppose toutes les liaisons parfaites.
Le coulisseau a pour masse M et coulisse le long de la tige verticale entraînée suivant une loi imposée $\psi(t)$ autour de $(O, \vec{z}_0)$. Son moment d'inertie par rapport à $(O, \vec{z}_0)$ est négligé.
Les tiges mobiles de masses négligeables, sont articulées respectivement en O_1 et O_2 ($O_1O_2 = 2\ell$). Ces tiges à l'extrémité desquelles sont montées des masses identiques m, sont de longueurs b.

Questions

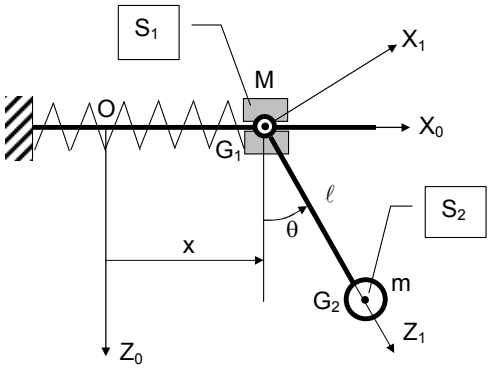
1. Caractériser ce système (holonôme ou pas, dissipatif ou pas, admettant un lagrangien ou pas, nombre de degrés de liberté).
2. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de ce régulateur.
3. Ecrire l'équation du mouvement par la méthode de Lagrange.
4. Retrouver cette équation en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.
5. Trouver une condition suffisante d'existence d'une intégrale première de Painlevé. Ecrire l'intégrale première.

Exercice 2 : pendule d'Euler

Le système est formé des solides S_1 et S_2.
On pose :

$$\overrightarrow{OG_1} = x\vec{X}_0 \qquad (\vec{X}_0, \vec{X}_1) = \theta \qquad \overrightarrow{G_1G_2} = \ell\vec{Z}_1$$

Lorsque G_1 est en O, le ressort est sans contrainte. On note k la raideur du ressort .
De plus, on suppose toutes les liaisons sans frottement.
S_1 de masse M, de centre de gravité G_1, est en glissière par rapport à S_0.
S_2 de masse m, de centre de gravité G_2, est en liaison pivot par rapport à S_1.



Questions

1. Caractériser ce système (holonôme ou pas, dissipatif ou pas…)
2. Déterminer son énergie cinétique.
3. Déterminer les équations de Lagrange donnant les équations de mouvement .
4. Retrouver ces résultats par les théorèmes généraux.

Exercice 3 : Etude du déploiement des bras d'un satellite

Afin d'étudier le déploiement des bras d'un satellite, bras destinés au contrôle de l'autorotation, on emploie le modèle expérimental défini par la figure ci-dessous.

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère galiléen.

Le corps du satellite S_1 est en liaison pivot parfaite d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec S_0. On associe à S_1 le repère $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$. La position de S_1 par rapport à S_0 est repérée par le paramètre $\psi=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{z}_0,\vec{z}_1)$.
On notera m_1 la masse du solide S_1.
R_1 est repère principal d'inertie et on notera A_1, B_1, C_1 les moments principaux d'inertie.

Le bras du satellite S_2 est en liaison pivot d'axe $(O_2,\vec{y}_1)$ avec S_1, $\overrightarrow{O_1O_2}=a_2\vec{x}_1$.
On associe à S_2 le repère $R_2(G_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$. La position de S_2 par rapport à S_1 est repérée par le paramètre $\theta_2=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)$.

On associe à la liaison pivot un frottement visqueux modélisé par un couple résistant :

$$\vec{C}_{12}=-\nu_2\dot{\theta}_2\vec{y}_1 .$$

Entre S_1 et S_2 on place un ressort de torsion de raideur k_2 et un moteur délivrant un couple

$$\vec{C}_{m2}=C_{m2}\vec{y}_1 .$$

G_2 est le centre d'inertie de S_2 défini par $\overrightarrow{O_2G_2}=b_2\vec{z}_2$.
On notera m_2 la masse du solide S_2.
R_2 est repère principal d'inertie et on notera A_2, B_2, C_2 les moments principaux d'inertie.

Le bras du satellite S_3 est en liaison pivot d'axe $(O_3,\vec{y}_1)$ avec S_1, $\overrightarrow{O_1O_3}=-a_3\vec{x}_1$.
On associe à S_3 le repère $R_3(G_3,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$. La position de S_3 par rapport à S_1 est repérée par le paramètre $\theta_3=(\vec{z}_1,\vec{z}_3)$.

On associe à la liaison pivot un frottement visqueux modélisé par un couple résistant :

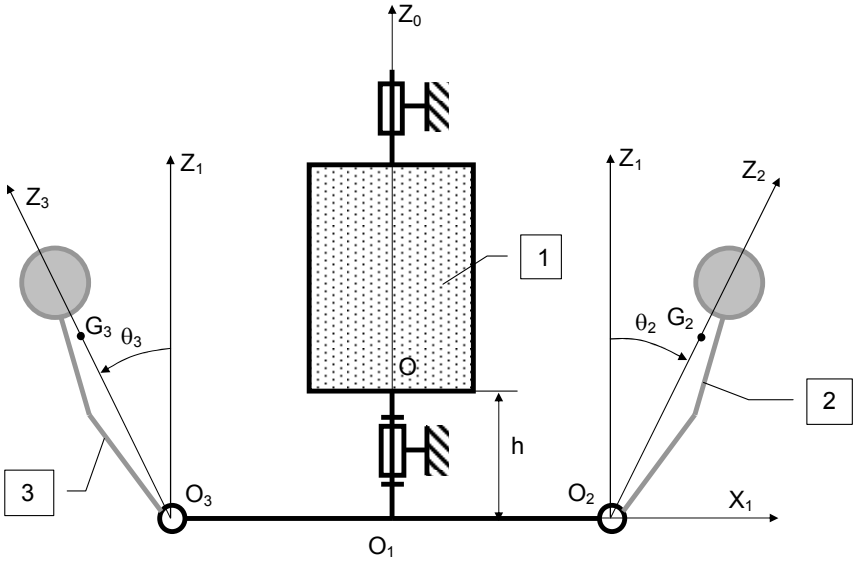
$$\vec{C}_{13}=-\nu_3\dot{\theta}_3\vec{y}_1 .$$

Entre S_1 et S_3 on place un ressort de torsion de raideur k_3 et un moteur délivrant un couple

$$\vec{C}_{m3}=C_{m3}\vec{y}_1 .$$

G_3 est le centre d'inertie de S_3 défini par $\overrightarrow{O_3G_3}=b_3\vec{z}_3$.
On notera m_3 la masse du solide S_3.
R_2 est repère principal d'inertie et on notera A_3, B_3, C_3 les moments principaux d'inertie.
Soit $\Sigma=S_1\cup S_2\cup S_3$

Questions

1. Caractériser ce système (holonôme ou pas, dissipatif ou pas…)
2. Déterminer l'énergie cinétique de Σ.
3. Déterminer les équations de Lagrange donnant les équations de mouvement .
4. Montrer que l'une d'elle est une intégrale première.
5. Retrouver ces résultats par les théorèmes généraux.
6. Calculer Z_{01} la composante sur $\vec{z}_0$ de l'effort de liaison entre S_0 et S_1 en utilisant le principe fondamental de la dynamique. Comment doit-on procéder en utilisant les équations de Lagrange ? Conclure sur le choix de la méthode.

2 Equations de Lagrange